ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.17
1986

УДК 514.75

К ГЕОМЕТРИИ АФФИННОГО ТРЕХСОСТАВНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $\mathcal{H}(\mathcal{M}(\Lambda))$

Т.Н.Юшкевич

Тройку распределений $\mathcal{H}_r, \mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n$ соответственно r-мерных плоскостей Π_r, m-мерных плоскостей Π_m и гиперплоскостей Π_n аффинного пространства A_{n+1} с отношением инцидентности ($X \in \Pi_r \subset \Pi_m \subset \Pi_n$) их соответствующих элементов в общем центре X назовем трехсоставным аффинным распределением $\mathcal{H}(M(\Lambda)) \subset \mathcal{A}_{n+1}$, в котором распределение 1-го рода $\mathcal{H}_r$ назовем базисным, а распределения 1-го рода $\mathcal{H}_m$ и $\mathcal{H}_n$ -оснащающими распределениями [4].

В настоящей работе задано трехсоставное распределение $\mathcal{H}(M(\Lambda))$, доказана теорема существования и рассмотрен аналог соответствия Бомпьяни-Пантази для аффинного пространства. На протяжении всего изложения индексы принимают следующие значения: $\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}=\overline{1,n+1}$; $i,j,k=\overline{r+1,m}$; $p,q,r,s,t=\overline{1,r}$; $a=\overline{1,m}$; $\alpha,\beta=\overline{m+1,n}$; $u,v=\overline{r+1,n}$; $\hat{u}=\overline{r+1,n+1}$; $\hat{\alpha}=\overline{m+1,n+1}$; $\sigma=\overline{1,n}$.

1.Отнесем аффинное пространство $\mathcal{A}_{n+1}$ к подвижному реперу $\{M,\vec{e}_\mathcal{J}\}$, инфинитезимальные перемещения которого $dM=\omega^\mathcal{J}\vec{e}_\mathcal{J}$; $d\vec{e}_\mathcal{J}=\omega^\mathcal{K}_\mathcal{J}\vec{e}_\mathcal{K}$; где $d\omega^\mathcal{J}=\omega^\mathcal{K}\wedge\omega^\mathcal{J}_\mathcal{K}$; $d\omega^\mathcal{K}_\mathcal{J}=\omega^\mathcal{I}_\mathcal{J}\wedge\omega^\mathcal{K}_\mathcal{I}$. Канонизируем репер $\{M,\vec{e}_\mathcal{J}\}$ следующим образом: $\{\vec{e}_p\}\subset\Pi_r$, $\{\vec{e}_a\}\subset\Pi_m$, $\{\vec{e}_\sigma\}\subset\Pi_n$, $X\equiv M$. Такой репер назовем репером нулевого порядка $\mathcal{R}^0$. В репере $\mathcal{R}^0$ дифференциальные уравнения распределения $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ имеют вид:

$$\omega^{\hat{u}}_p=\Lambda^{\hat{u}}_{p\mathcal{K}}\omega^\mathcal{K};\quad \omega^{\hat{\alpha}}_i=M^{\hat{\alpha}}_{i\mathcal{K}}\omega^\mathcal{K};\quad \omega^{n+1}_\alpha=H^{n+1}_{\alpha\mathcal{K}}\omega^\mathcal{K};$$
$$\Delta\Lambda^{\hat{u}}_{p\mathcal{K}}\wedge\omega^\mathcal{K}=0;\quad \Delta M^{\hat{\alpha}}_{i\mathcal{K}}\wedge\omega^\mathcal{K}=0;\quad \Delta H^{n+1}_{\alpha\mathcal{K}}\wedge\omega^\mathcal{K}=0, \tag{1}$$

где

$$\Delta\Lambda^i_{p\mathcal{K}}=\nabla\Lambda^i_{p\mathcal{K}}+\Lambda^{\hat{\alpha}}_{p\mathcal{K}}\omega^i_{\hat{\alpha}};\quad \Delta M^\alpha_{i\mathcal{K}}=\nabla M^\alpha_{i\mathcal{K}}+M^{n+1}_{i\mathcal{K}}\omega^\alpha_{n+1}-\Lambda^\alpha_{p\mathcal{K}}\omega^p_i;$$
$$\Delta\Lambda^\alpha_{p\mathcal{K}}=\nabla\Lambda^\alpha_{p\mathcal{K}}+\Lambda^{n+1}_{p\mathcal{K}}\omega^\alpha_{n+1};\quad \Delta M^{n+1}_{i\mathcal{K}}=\nabla M^{n+1}_{i\mathcal{K}}-\Lambda^{n+1}_{p\mathcal{K}}\omega^p_i;$$

$$\Delta\Lambda^{n+1}_{p\mathcal{K}}=\nabla\Lambda^{n+1}_{p\mathcal{K}};\quad \Delta H^{n+1}_{\alpha\mathcal{K}}=\nabla H^{n+1}_{\alpha\mathcal{K}}-\Lambda^{n+1}_{p\mathcal{K}}\omega^p_\alpha-M^{n+1}_{i\mathcal{K}}\omega^i_\alpha.$$

Из системы (1) следует утверждение:

Т е о р е м а. Распределение $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ аффинного пространства $\mathcal{A}_{n+1}$ существует с произволом в $(n+1-m+r)+(r+1)(n+1-m)-1$ функций $(n+1)$-го аргумента.

Мы рассматриваем регулярные распределения $\mathcal{H}(M(\Lambda))$, для которых тензор Λ^{n+1}_{pq} невырожденный [4]:

$$\Lambda=det\,\|\Lambda_{pq}\|\neq 0;\ \Lambda^{pq}\Lambda_{qr}=\Lambda^{qp}\Lambda_{rq}=\delta^p_r\quad (\Lambda^{n+1}_{pq}\equiv\Lambda_{pq}). \tag{2}$$

В таком случае возможна частичная канонизация репера $\mathcal{R}^0$, при которой $M^{n+1}_{iq}=0$, $H^{n+1}_{\alpha q}=0$. Полученный репер назовем репером первого порядка $\mathcal{R}^1$. Дифференциальные уравнения трехсоставного распределения $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ в репере $\mathcal{R}^1$ примут вид:

$$\omega^{\hat{u}}_p=\Lambda^{\hat{u}}_{p\mathcal{K}}\omega^\mathcal{K};\quad \omega^\alpha_i=M^\alpha_{i\mathcal{K}}\omega^\mathcal{K};\quad \omega^{n+1}_i=M^{n+1}_{i\hat{u}}\omega^{\hat{u}};$$
$$\omega^{n+1}_\alpha=H^{n+1}_{\alpha\mathcal{K}}\omega^\mathcal{K};\quad \omega^p_u=A^p_{u\mathcal{K}}\omega^\mathcal{K}. \tag{3}$$

2.Под нормализацией трехсоставного распределения $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ будем понимать нормализацию его базисного распределения в смысле Нордена [3].

Построим последовательно системы величин:

$$a^\alpha=\frac{1}{r}a^{pq}a^\alpha_{pq},\quad \nabla a^\alpha-a^\alpha\omega^{n+1}_{n+1}+\omega^\alpha_{n+1}=a^\alpha_\mathcal{K}\omega^\mathcal{K};$$
$$a^i=\frac{1}{r}a^{pq}a^i_{pq},\quad \nabla a^i-a^i\omega^{n+1}_{n+1}+\omega^i_{n+1}+a^\alpha\omega^i_\alpha=a^i_\mathcal{K}\omega^\mathcal{K};$$
$$Q^j_i=\frac{1}{r}(a^j_{pq}-a^ja_{pq})\widetilde{M}^{pq}_\alpha(A^r_{it}a^{ts}-\frac{1}{r}A^t_{it}a^{rs})(a^\alpha_{rs}-a^\alpha a_{rs})-$$
$$-(A^p_{ir}a^{rq}-\frac{1}{r}A^r_{ir}a^{pq})(a^j_{pq}-a^ja_{pq}),\quad \nabla Q^j_i-Q^j_i\omega^{n+1}_{n+1}=Q^j_{i\mathcal{K}}\omega^\mathcal{K}; \tag{4}$$
$$\nu^\alpha_j=(A^p_{kr}a^{rq}-\frac{1}{r}A^r_{kr}a^{pq})(a^\alpha_{pq}-a^\alpha a_{pq})\widetilde{Q}^k_j,\quad \nabla\nu^\alpha_j=\nu^\alpha_{j\mathcal{K}}\omega^\mathcal{K};$$
$$\nu^i_j=(A^p_{kr}a^{rq}-\frac{1}{r}A^r_{rr}a^{pq})(a^i_{pq}-a^ia_{pq})\cdot\widetilde{Q}^k_j,\quad \nabla\nu^i_j+\nu^\alpha_j\omega^i_\alpha=\nu^i_{j\mathcal{K}}\omega^\mathcal{K};$$
$$\nu^i_\alpha=M^{ji}H_{\alpha j},\quad \nabla\nu^i_\alpha+\delta^\beta_\alpha\omega^i_\beta=\nu^i_{\alpha\mathcal{K}}\omega^\mathcal{K};\quad \nu^\beta_\alpha=\delta^\beta_\alpha,$$

где

$$a^{\hat u}_{pq}=\frac{1}{2}\left(\Lambda^{\hat u}_{pq}+\Lambda^{\hat u}_{qp}\right),\quad a^{pq}a_{qr}=\delta^p_r,\quad a^{n+1}_{pq}\equiv a_{pq},$$
$$M^{ij}M^{n+1}_{jk}=M^{ji}M^{n+1}_{kj}=\delta^i_k,\quad Q^i_k\tilde{Q}^k_j=Q^k_j\tilde{Q}^i_k=\delta^i_j,$$
$$\tilde{M}^{ps}_\alpha M^\beta_{ps}=r\delta^\beta_\alpha,\quad \tilde{M}^{pt}_\alpha\cdot M^\alpha_{ps}=(n-m)\,\delta^t_s.$$

Поле вектора $\vec{R}=\nu^p\vec{e}_p+a^u\vec{e}_u+\vec{e}_{n+1}$, $\nabla\nu^p-\nu^p\omega^{n+1}_{n+1}+\omega^p_{n+1}=\nu^p_\varkappa\omega^\varkappa$ и векторов $\vec{k}=\nu^v_u\vec{e}_v$ внутренним инвариантным образом присоединено к трехсоставному распределению $\mathcal{H}(M(\Lambda))$. Охват величин $\{\nu^p\}$ можно осуществить, например, по формуле (5), положив $\nu^p=L^p$.

Плоскость $N_{n+1-r}=\{M,\vec{k},\vec{k}_u\}$, натянутая на аффинную нормаль $k_1=\{M,\vec{k}\}$ и характеристику $\Pi_{n-r}=\{M,\vec{k}_u\}$, является внутренней инвариантной нормалью 1-го рода распределения $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ [5].

В дифференциальной окрестности второго порядка составим следующие величины:

$$L^p=-\Lambda^{ps}(\Lambda_{sn+1}+\Lambda_{su}a^u),\ \nabla L^p-L^p\omega^{n+1}_{n+1}+\omega^p_{n+1}=L^p_\varkappa\omega^\varkappa;$$
$$A^p_s=L^p_s-L^pL^q\Lambda_{qs}+A^p_{us}a^u,\ \nabla A^p_s-A^p_s\omega^{n+1}_{n+1}=A^p_{s\varkappa}\omega^\varkappa;$$
$$\tilde{A}^s_qA^p_s=\tilde{A}^p_sA^s_q=\delta^p_q; \tag{5}$$
$$Q^p=-\tilde{A}^p_q\big[L^q_{n+1}-L^qL^s(\Lambda_{s,n+1}+\Lambda_{su}a^u)-L^q(a^i(M_{in+1}+M_{iu}a^u)+$$
$$+a^\alpha(H_{\alpha,n+1}+H_{\alpha u}a^u))+a^i(A^q_{i,n+1}+A^q_{iu}a^u)+a^\alpha(A^q_{\alpha,n+1}+A^q_{\alpha u}a^u)+$$
$$+L^q_ua^u\big],\ \nabla Q^p-Q^p\omega^{n+1}_{n+1}+\omega^p_{n+1}=Q^p_\varkappa\omega^\varkappa.$$

Квазитензоры L^p и Q^p определяют в общем случае различные инвариантные нормали 1-го рода распределения $\mathcal{H}(M(\Lambda))$. Тензор

$$\pi^p=L^p-Q^p,\quad \nabla\pi^p-\pi^p\omega^{n+1}_{n+1}=\pi^p_\varkappa\omega^\varkappa \tag{6}$$

позволяет задать однопараметрический пучок нормалей 1-го рода, внутренним инвариантным образом присоединенный к распределению $\mathcal{H}(M(\Lambda))$:

$$\pi^p(\sigma)=L^p-\sigma\pi^p, \tag{7}$$

где σ -абсолютный инвариант.

3.Положим, что ν^p -объект, определяющий произвольную нормаль 1-го рода. Тогда тензор

$$\pi_p=-\Lambda_{pq}\nu^q-\Lambda_{pu}a^u-\Lambda_{pn+1},\ \nabla\pi_p=\pi_{p\varkappa}\omega^\varkappa \tag{8}$$

определяет $(r-1)$ -мерную плоскость, принадлежащую плоскости Π_r и не проходящую через начало репера M, т.е. нормаль 2-го рода распределения $\mathcal{H}(M(\Lambda))$. Уравнения (8) разрешимы относительно ν^p:

$$\nu^p=h^p-\pi_q\Lambda^{pq}. \tag{9}$$

Итак, устанавливается взаимно однозначное соответствие между нормалями 1-го и 2-го рода распределения $\mathcal{H}(M(\Lambda))$, которое является аналогом соответствия Бомпьяни-Пантази для аффинного пространства.

Применяя полученное соответствие к пучку (7) нормалей 1-го рода, получаем однопараметрический пучок нормалей 2-го рода, определенный объектом

$$\pi_p(\sigma)=-\Lambda_{pq}\pi^q(\sigma)-\Lambda_{pu}a^u-\Lambda_{pn+1}. \tag{10}$$

Библиографический список

1.А л ш и б а я Э.Д. К геометрии распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве: Тр.Геометр. семинара / ВИНИТИ АН СССР.-М.,1974.Т.5.С.169-193.

2.Л а п т е в Г.Ф. Распределения касательных элементов: Тр.Геометр.семинара / ВИНИТИ АН СССР.-М.,1971.Т.3. С.29-48.

3.Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности: Учебник.-М.;-Л.; Госиздат, 1950.

4.Инвариантные подпространства, ассоциированные с $H(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства. 1 / П о п о в Ю.И.; Калинингр.ун-т.-Калининград, 1984.-93с.-Библиогр.21 назв.- Рус.- Деп.в ВИНИТИ 2.07.84, № 4481-В.

5.Многомерные регулярные гиперполосы аффинного пространства / П о п о в Ю.И.; Калинингр.ун-т.-Калининград, 1981.-58с.-Библиогр.15 назв.-Рус.-Деп.в ВИНИТИ 1.12.81, № 5455-В.